

DANMARKS TEKNISKE UNIVERSITET

KURSUSNAVN	INTRODUKTION TIL INTELLIGENTE SYSTEMER
KURSUSNUMMER	02461
HJÆLPEMIDLER	ALLE HJÆLPEMIDLER ER TILLADT
VARIGHED	2 TIMER
VÆGTNING	ALLE DELOPGAVER VÆGTES ENS

INDHOLD

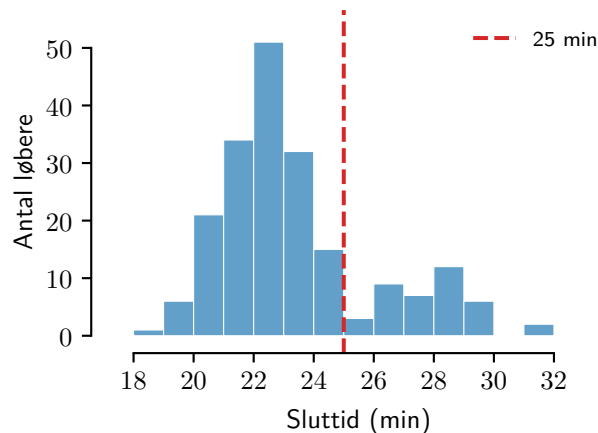
OPGAVE A: LØBEKONKURRENCE	2
OPGAVE B: SOLCELLEPANEL	4
OPGAVE C: NEURALT NETVÆRK MED ELU	6
OPGAVE D: ROBOT	8
OPGAVE E: MADANMELDELSER	10

BESVARELSE AF OPGAVERNE

Alle spørgsmål skal besvares med et entydigt resultat, som skal angives med understregning sidst i hver besvarelse. Besvarelsen skal altid underbygges med relevante betragtninger og/eller beregninger. Det skal klart fremgå hvilke teorier og formler der tages udgangspunkt i, og alle relevante mellemregninger skal medtages.

Opgave A Løbekonkurrence

En løbeklub vil vurdere om et nyt træningsprogram forbedrer løbernes præstation. Af $n = 200$ løbere der deltog i forsøget, gennemfører $k = 160$ løbet på under 25 minutter, svarende til en estimeret succesrate på $\hat{p} = 0.80$. Den kendte succesrate for klubbens løbere før forsøget var $p_0 = 0.70$.



Spørgsmål A.1: Beregn et 95 %-konfidensinterval for den sande succesrate p efter det nye træningsprogram. Angiv dit svar som $\hat{p} \pm e$.

Svar A.1: Vi indsætter $\hat{p} = 0.80$ og $n = 200$:

$$\begin{aligned} 0.80 \pm 1.96 \sqrt{\frac{0.80 \cdot 0.20}{200}} &= 0.80 \pm 1.96 \cdot \sqrt{0.0008} \\ &= 0.80 \pm 1.96 \cdot 0.0283 \\ &= 0.80 \pm 0.055. \end{aligned}$$

Konfidensintervallet er 0.80 ± 0.055 .

Spørgsmål A.2: Kan vi på baggrund af konfidensintervallet konkludere, at det nye program har forbedret succesraten i forhold til $p_0 = 0.70$? Begrund dit svar.

Svar A.2: Ja. Den tidligere succesrate $p_0 = 0.70$ ligger uden for konfidensintervallet $[74.5\%, 85.5\%]$. Det betyder, at vi kan forkaste hypotesen $p = 0.70$. Vi kan dermed konkludere, at det nye program signifikant forbedrer succesraten.

Spørgsmål A.3: Klubben overvejer at gentage forsøget med et større antal løbere for at opnå en nøjagtighed på $\pm 3\%$ (dvs. halv-bredden af konfidensintervallet er $e = 0.03$). Beregn det nødvendige antal løbere n . Benyt $\hat{p} = 0.80$ som forhåndsestimeret succesrate.

Svar A.3: Det nødvendige antal beregnes af

$$n = \frac{z_{0.025}^2 \hat{p}(1 - \hat{p})}{e^2} = \frac{1.96^2 \cdot 0.80 \cdot 0.20}{0.03^2} = \frac{3.8416 \cdot 0.16}{0.0009} = \frac{0.6147}{0.0009} \approx 683.$$

Der kræves mindst 683 løbere.

Spørgsmål A.4: Deltagelse i forsøget var frivillig: løberne valgte selv om de ville prøve det nye program. Beskriv en mulig fejlkilde dette introducerer, og forklar hvordan det påvirker fortolkningen af resultatet.

Svar A.4: Frivillig deltagelse medfører selektionsbias: Løbere der aktivt vælger et nyt program er muligvis allerede mere motiverede og trænede end gennemsnittet. Forbedringen i succesraten kan derfor ikke entydigt tilskrives selve programmet — det kan ligeså vel skyldes at det er de bedst motiverede løbere der deltog. Vi kan ikke drage kausale slutninger fra dette forsøgsdesign.

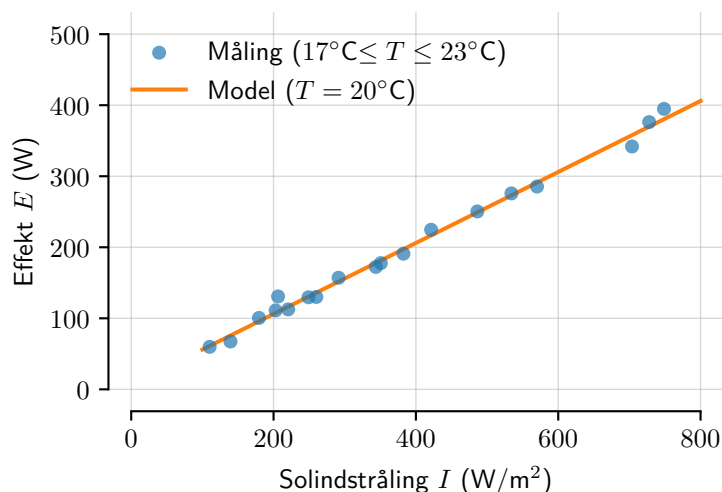
A ■

Opgave B Solcellepanel

Et solcellepanel måles under $n = 80$ forskellige driftsforhold. For hvert forsøg registreres solindstrålingen I (W/m^2), lufttemperaturen T ($^{\circ}\text{C}$) og den producerede effekt E (W). Med mindste-kvadraters metode er følgende lineære model tilpasset:

$$\text{Model 1: } \hat{E} = w_0 + w_1 I + w_2 T,$$

med estimerede parametre $w_0 = 30$, $w_2 = -1.2$. Figuren nedenfor viser målingerne for $T \approx 20^{\circ}\text{C}$ samt den tilpassede regressionslinje for $T = 20$.



Spørgsmål B.1: Aflæs fra figuren hældningskoefficienten w_1 .

Svar B.1: Regressionslinjen i figuren svarer til $\hat{E} = 6 + w_1 I$ for $T = 20$. Det kan passe med at linjen stiger fra ca. $E = 100$ ved $I = 200$ til ca. $E = 400$ ved $I = 800$, dvs. en stigning på 300 W over 600 W/m^2 . Hældningskoefficienten er dermed

$$w_1 \approx \frac{300}{600} = 0.5 \text{ W pr. } \text{W}/\text{m}^2.$$

Spørgsmål B.2: Beregn den forudsagte effekt $\hat{E}$ for $I = 0$ W/m^2 og $T = 30^{\circ}\text{C}$. Giv en kort kommentar på resultatet.

Svar B.2:

$$\hat{E} = 30 + w_1 \cdot 0 + (-1.2) \cdot 30 = 30 + 0 - 36 = -6 \text{ W}.$$

Modellen forudsiger en negativ effekt ved nul indstråling, hvilket næppe er korrekt. Det skyldes givetvis at modellen ikke perfekt afspejler den fysiske solcelle.

Vi ønsker nu at sammenligne den lineære model (Model 1) med et neuralt netværk (Model 2), som er implementeret i PyTorch:

```
model2 = torch.nn.Sequential(  
    torch.nn.Linear(2, 10),  
    torch.nn.ReLU(),  
    torch.nn.Linear(10, 1)  
)
```

Spørgsmål B.3: Hvor mange parametre har Model 2 i alt?

Svar B.3: Første lag (**Linear**(2,10)) har $2 \cdot 10 + 10 = 30$ parametre (vægte plus bias). Andet lag (**Linear**(10,1)) har $10 \cdot 1 + 1 = 11$ parametre. I alt 41 parametre.

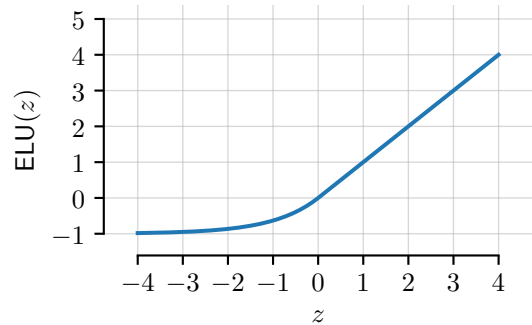
Spørgsmål B.4: Vi har kun adgang til træningsfejlen for de to modeller, og Model 2 opnår en lavere træningsfejl end Model 1. Kan vi på dette grundlag konkludere, at Model 2 generaliserer bedre? Begrund dit svar.

Svar B.4: Nej. En mere kompleks model (41 parametre) vil altid kunne opnå mindst lige så lav træningsfejl som en simplere model (3 parametre), men det siger ingenting om generalisering. For at sammenligne generalisering kræves en uafhængig test- eller valideringsfejl som ikke er brugt under træning.

Opgave C Neurtalt netværk med ELU

En aktiveringsfunktion der benyttes i mange neurale netværk hedder ELU (Exponential Linear Unit). Den er defineret som

$$\text{ELU}(z) = \begin{cases} z & \text{hvis } z \geq 0, \\ e^z - 1 & \text{hvis } z < 0. \end{cases}$$



En neuron med to input, x_1 og x_2 , og ELU-aktivering defineres:

$$f(x_1, x_2) = \text{ELU}(w_0 + w_1 x_1 + w_2 x_2).$$

Vi antager $w_0 = w_1 = w_2 = 1$.

Spørgsmål C.1: Beregn neuronens output $f(1, 2)$.

Svar C.1: Det præ-aktiverede input er $z = 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 4 \geq 0$, og

$$f(1, 2) = \text{ELU}(4) = \underline{4}.$$

Spørgsmål C.2: Beregn gradienten $\nabla f(1, -3) = [\frac{\partial f}{\partial w_0}, \frac{\partial f}{\partial w_1}, \frac{\partial f}{\partial w_2}]^\top$ med hensyn til parametrene (w_0, w_1, w_2) . Du må gerne udtrykke dit svar i eksakt form med e^{-1} .

Svar C.2: Vi beregner først den afledte af ELU.

$$\frac{d\text{ELU}(z)}{dz} = \begin{cases} 1 & \text{hvis } z \geq 0, \\ e^z & \text{hvis } z < 0. \end{cases}$$

Kædereglen giver $\frac{\partial f}{\partial w_i} = \frac{d\text{ELU}(z)}{dz} \cdot x_i$, hvor $x_0 = 1$. Det præ-aktiverede input er $z^* = 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-3) = -1 < 0$, så den afledte er $e^{z^*} = e^{-1}$. Dermed er

$$\nabla f(1, -3) = e^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Nu definerer vi et neuralt netværk med ét skjult lag bestående af 16 neuroner med ELU-aktivering, efterfulgt af et outputlag med ELU-aktivering:

```
model = torch.nn.Sequential(  
    torch.nn.Linear(2, 16),  
    torch.nn.ELU(),  
    torch.nn.Linear(16, 1),  
    torch.nn.ELU()  
)
```

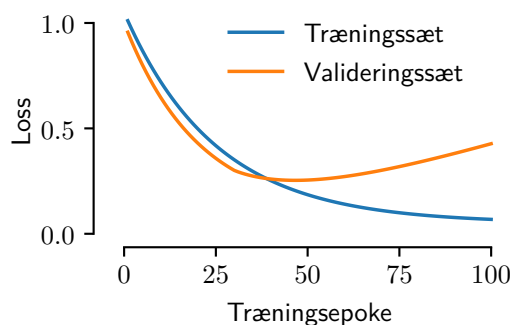
Spørgsmål C.3: Hvad er værdiområdet (range) for netværkets output, dvs. hvilke værdier kan output-neuronen antage? Begrund dit svar med udgangspunkt i definitionen af ELU.

Svar C.3: Det lineære outputlag kan antage en vilkårlig reel værdi $z \in (-\infty, +\infty)$. ELU-aktiveringen transformerer dette til:

$$\text{ELU}(z) = \begin{cases} z & \text{hvis } z \geq 0, \\ e^z - 1 & \text{hvis } z < 0. \end{cases}$$

For $z \geq 0$ kan output antage alle værdier i $[0, +\infty)$. For $z < 0$ gælder $e^z \in (0, 1)$, så $e^z - 1 \in (-1, 0)$. Det samlede værdiområde er dermed $(-1, +\infty)$.

Vi træner netværket på et datasæt og observerer udviklingen i loss på træningssættet og et uafhængigt valideringssæt:

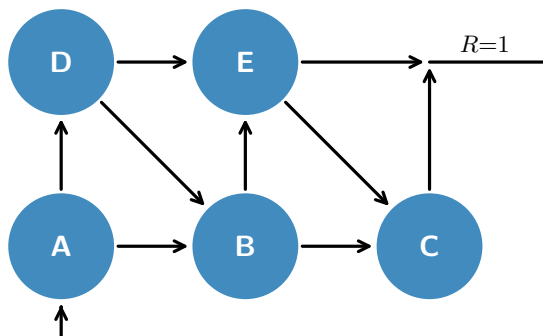


Spørgsmål C.4: Ses der tegn på overfitting? Begrund dit svar med udgangspunkt i figuren.

Svar C.4: Ja. Træningsloss falder konsekvent gennem alle epoker, mens valideringsloss efter en indledende periode begynder at stige igen. Den stigende valideringsloss er et tydeligt tegn på overfitting: netværket tilpasser sig i stigende grad støjen i træningsdataet og generaliser derfor dårligere.

Opgave D Robot

En robot navigerer i fem tilstande A–E arrangeret som vist i figuren nedenfor. Robotten kan kun bevæge sig mellem tilstandene via de viste pile. Hvis robotten går **op** fra tilstand C eller **højre** fra tilstand E, modtager den belønning $R = 1$ og transporteres til tilstand A. Alle andre transitioner giver belønning $R = 0$.



Vi benytter en discount faktor $\gamma = 0.9$. Det oplyses at $v(C) \approx 3.69$.

Spørgsmål D.1: Bestem $v(E)$.

Svar D.1: Fra E er de to handlinger **højre** og **ned** (til C). Vi bruger Bellman-optimalitetsbetingelsen $v(s) = \max_a [R(s, a) + \gamma v(s')]$.

$$q(E, \text{højre}) = R + \gamma v(A) = 1 + \gamma v(A).$$

$$q(E, \text{ned}) = 0 + \gamma v(C).$$

Da $v(C) = 1 + \gamma v(A)$ (C kan ligeledes nå afleveringsstedet i ét skridt med samme belønning), gælder $Q(E, \text{højre}) = v(C) = 3.69$. Desuden er $Q(E, \text{ned}) = \gamma v(C) = 0.9 \cdot 3.69 = 3.321$. Dermed er

$$v(E) = \max(3.69, 3.321) = \underline{3.69}, \quad \text{og den optimale handling er } \underline{\text{højre}}.$$

Spørgsmål D.2: Beregn $v(D)$.

Svar D.2: Fra D er de to handlinger **højre** (til E) og **ned** (til B). Først bestemmes $v(B)$: fra B kan robotten gå **højre** til C eller **op** til E. Da $v(C) = v(E) = 3.69$ er begge handlinger fra B ligeværdige, og $v(B) = \gamma v(C) = 0.9 \cdot 3.69 = 3.321$. Nu kan vi beregne Q-værdierne for D:

$$q(D, \text{højre}) = 0 + \gamma v(E) = 0.9 \cdot 3.69 = 3.321,$$

$$q(D, \text{ned}) = 0 + \gamma v(B) = 0.9 \cdot 3.321 = 2.989.$$

Dermed er

$$v(D) = \max(3.321, 2.989) = \underline{3.321}.$$

Spørgsmål D.3: Hvor mange rækker (tilstand-handling par) indeholder q-tabellen for dette miljø?

Svar D.3: Q-tabellen har én række per tilstand-handling par:

Tilstand	Mulige handlinger	Antal rækker
A	højre, op	2
B	højre, op	2
C	op	1
D	højre, ned	2
E	højre, ned	2
I alt		9

Q-tabellen indeholder 9 rækker.

Spørgsmål D.4: Hvad er q-værdien for de to handlinger fra tilstand E, hvis discount faktoren ændres til $\gamma = 0$?

Svar D.4: Med $\gamma = 0$ indgår kun den umiddelbare belønning i næste skridt:

$$Q(E, \text{højre}) = R(E \rightarrow A) + 0 \cdot v(A) = 1,$$

$$Q(E, \text{ned}) = R(E \rightarrow C) + 0 \cdot v(C) = 0.$$

Med $\gamma = 0$ tæller kun den umiddelbare belønning: fra E giver **højre** belønning 1 direkte, mens **ned** ikke giver nogen belønning i næste skridt.

En søgemaskine til restaurantanmeldelser er baseret på TF-IDF. Søgemaskinens database indeholder $N = 3\,000$ anmeldelser. En eksempel-anmeldelse (anmeldelse nr. 1) lyder:

Maden var fantastisk og desserten var absolut vidunderlig

Anmeldelsen indeholder i alt 8 ord. Tabellen nedenfor viser hvor mange af de 3 000 anmeldelser der indeholder hvert af de markerede ord (dokumentfrekvens, DF):

Ord	DF	Antal forekomster i anmeldelse 1
var	2 900	2
og	2 700	1
fantastisk	150	1
maden	1 500	1
vidunderlig	30	1

Vi benytter den naturlige logaritme og definerer

$$\begin{aligned} \text{TF}(t, d) &= \frac{\text{antal forekomster af } t \text{ i } d}{\text{antal ord i } d}, \\ \text{IDF}(t) &= \ln\left(\frac{\text{antal dokumenter}}{\text{antal dokumenter der indeholder } t}\right), \\ \text{TF-IDF}(t, d) &= \text{TF}(t, d) \cdot \text{IDF}(t), \end{aligned}$$

hvor t er en term (et ord) og d er et dokument.

Spørgsmål E.1: Beregn ordfrekvensen (term frequency, TF) for ordet **var** i anmeldelse 1.

Svar E.1:

$$\text{TF}(\text{var}, 1) = \frac{2}{8} = \underline{0.25}.$$

Spørgsmål E.2: Beregn TF-IDF for ordet **fantastisk** i anmeldelse 1.

Svar E.2: Vi beregner først TF og IDF for **fantastisk**:

$$\begin{aligned} \text{TF}(\text{fantastisk}, 1) &= \frac{1}{8} = 0.125, \\ \text{IDF}(\text{fantastisk}) &= \ln\left(\frac{3\,000}{150}\right) = \ln(20) \approx 2.996. \end{aligned}$$

Dermed er

$$\text{TF-IDF}(\text{fantastisk}, 1) = 0.125 \cdot 2.996 \approx \underline{0.374}.$$

Spørgsmål E.3: Sammenlign TF-IDF-værdien for **maden** og **vidunderlig** i anmeldelse 1. Hvilket ord scorer højest, og hvad er den grundlæggende årsag?

Svar E.3: Begge ord optræder én gang i anmeldelsen, så TF er identisk: $\text{TF} = 1/8$.

$$\begin{aligned} \text{TF-IDF}(\text{maden}, 1) &= \frac{1}{8} \cdot \ln\left(\frac{3\,000}{1\,500}\right) = 0.125 \cdot \ln(2) \approx 0.087, \\ \text{TF-IDF}(\text{vidunderlig}, 1) &= \frac{1}{8} \cdot \ln\left(\frac{3\,000}{30}\right) = 0.125 \cdot \ln(100) \approx 0.576. \end{aligned}$$

Vidunderlig scorer markant højere fordi ordet er meget sjældnere i korpus (DF= 30) og dermed mere

karakteristisk for denne anmeldelse end det almindelige ord **maden** (DF= 1500).

Spørgsmål E.4: Ofte fjernes stopord som **var** og **og** inden TF-IDF beregnes. Hvilken af følgende begrundelser for at fjerne stopord er mest korrekt?

- a Hvis stopord ikke fjernes kan IDF ikke beregnes pga. division med nul.
- b Stopord forekommer i næsten alle dokumenter og bidrager derfor kun lidt til at skelne mellem relevante og irrelevante dokumenter.
- c Stopord fjernes, fordi de ellers kan komme til at dominere søgningen på grund af deres høje forekomst i tekster.

Svar E.4: Stopord som **var** (DF= 2900) og **og** (DF= 2700) har meget lav IDF idet det forekommer i næsten alle dokumenter.

$$\text{IDF}(\text{var}) = \ln\left(\frac{3000}{2900}\right) \approx 0.034,$$

$$\text{IDF}(\text{og}) = \ln\left(\frac{3000}{2700}\right) \approx 0.105.$$

Disse ord bidrager dermed næsten ikke til TF-IDF-vektoren. Svar b er mest korrekt.

E