

DANMARKS TEKNISKE UNIVERSITET

KURSUSNAVN	INTRODUKTION TIL INTELLIGENTE SYSTEMER
KURSUSNUMMER	02461
HJÆLPEMIDLER	ALLE HJÆLPEMIDLER ER TILLADT
VARIGHED	2 TIMER
VÆGTNING	ALLE DELOPGAVER VÆGTES ENS

INDHOLD

OPGAVE A: PLANKEGULV	2
OPGAVE B: SALGSTAL	3
OPGAVE C: FAIRNESS I ANSÆTTELSE	5
OPGAVE D: NEURALT NETVÆRK	7
OPGAVE E: REINFORCEMENT LEARNING	9

BESVARELSE AF OPGAVERNE

Alle spørgsmål skal besvares med et entydigt resultat, som skal angives med understregning sidst i hver besvarelse. Besvarelsen skal altid underbygges med relevante betragtninger og/eller beregninger. Det skal klart fremgå hvilke teorier og formler der tages udgangspunkt i, og alle relevante mellemregninger skal medtages.

En virksomhed producerer gulvplanker, som i gennemsnit skal være omkring 2 500 mm lange. Helt specifikt er det krævet at gennemsnittet ligger mellem 2 499 mm og 2 501 mm. Det gør ikke så meget at der er en vis variation i længden, så længe den gennemsnitlige længde er korrekt.

Værkføreren har opmålt $n = 100$ planker og beregnet deres gennemsnitlige længde til $m_x = 2\,497$ mm. Variansen af målingerne er beregnet til $s_x^2 = 235$.

Spørgsmål A.1: Beregn ud fra værkførerens måling et 95% konfidensinterval for plankernes gennemsnitlige længde. Angiv resultatet som $m \pm e$.

Svar A.1: Intervallet beregnes som

$$m_x \pm 1.96 \cdot \frac{s_x}{\sqrt{n}} = 2497 \pm 1.96 \cdot \frac{\sqrt{235}}{\sqrt{100}} = \underline{2497 \pm 3.00}$$

Spørgsmål A.2: Den laveste acceptable gennemsnitlige længde, $x = 2\,499$, er indeholdt i konfidensintervallet. Er det hermed statistisk set påvist at kravene til plankernes gennemsnitslængde er opfyldt?

Svar A.2: Nej. Konfidensintervallet viser kun at det ikke kan afvises at kravene er opfyldt. Det er statistisk påvist, at den gennemsnitlige længde ligger inden for intervallet, men intervallet indeholder fx. også den målte gennemsnitlige længde $x = 2\,497$ som ikke er acceptabel.

Spørgsmål A.3: Værkføreren vil gerne føle sig mere sikker, og kunne derfor godt tænke sig et smallere konfidensinterval med bredden ± 0.3 mm. Hvilken stikprøve-størrelse vil du anbefale? (Afrund til hele tusinder.)

Svar A.3: Den nødvendige stikprøve-størrelse kan beregnes som

$$n = 1.96^2 \frac{s_x^2}{e^2} = 1.96^2 \frac{235}{0.3^2} \approx \underline{10\,000}$$

På baggrund af en passende stor stikprøve beregner værkføreren et nyt konfidensinterval til $2\,500.2 \pm 0.25$, hvilket overbeviser værkføreren om at produktionen overholder kravene.

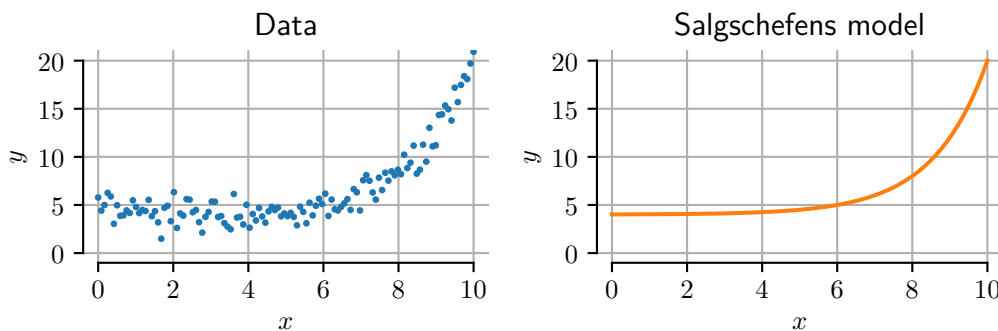
Spørgsmål A.4: Plankerne pakkes i kasser med $n = 100$ styk, og der vil naturligvis være en vis variation mellem kasserne. Ud fra de oplysninger vi har til rådighed, hvor stor en varians forventer du der cirka vil være mellem den gennemsnitlige plankelængde i de forskellige pakker?

Svar A.4: Variansen af den gennemsnitlige længde i en kasse med 100 styk svarer til standard fejlen (standard error of the mean) i en stikprøve med størrelse 100. Den eneste oplysning vi har om variansen af plankelængden er fra den første stikprøve, hvor $s_x^2 = 235$ er angivet. (Vi kan ikke beregne variansen ud fra værkførerens konfidensinterval, da vi ikke kender størrelsen af den nye stikprøve.) Herfra kan variansen af den gennemsnitlige plankelængde i en kasse med 100 planker beregnes som

$$\sigma_{m_x}^2 \approx \frac{s_x^2}{n} = \frac{235}{100} = \underline{2.35}$$

Opgave B Salgstal

Figuren nedenfor til venstre viser månedlige salgstal (y) for en virksomhed som funktion af virksomhedens alder (x). Der er i alt $n = 120$ datapunkter.



Da der er en ikke-lineær sammenhæng mellem x og y , overvejer vi at modellere data med en lineær regression på følgende form:

$$f(x) = w_0 + w_1 \cdot x + w_2 \cdot x^2 + w_3 \cdot x^3$$

Vi kan fitte den lineære regressionsmodel (dvs. bestemme parametrene) ved at løse et lineært ligningssystem.

Spørgsmål B.1: Hvor mange ligninger med hvor mange ubekendte skal løses?

Svar B.1: Da vores model har fire parametre, skal vi løse fire ligninger med fire ubekendte.

Alternativt overvejer vi at fitte et neuralt netværk med følgende (ikke færdiggjorte) PyTorch kode. Det neurale netværk skal have ét skjult lag med 10 neuroner som anvender en ReLU aktiveringsfunktion, samt et lineært output-lag.

```
import torch
K = 10
net = torch.nn.Sequential(
    ?,
    torch.nn.ReLU(),
    torch.nn.Linear(K, 1)
)
opt = torch.optim.Adam(net.parameters(), lr=0.1)
loss = torch.nn.MSELoss()
```

Spørgsmål B.2: Hvad skal der stå i koden, der hvor der er et rødt spørgsmålstegn?

Svar B.2: Spørgsmålstegnet står hvor vi skal angive det lineære input-lag. Da vi har ét input og 10 skjulte neuroner, skal der stå `torch.nn.Linear(1, K)`

Virksomhedens salgschef har fundet ud af at følgende regressionsmodel passer godt til data.

$$f(x) = 4 + \frac{2^{x+1}}{2^a}$$

Spørgsmål B.3: Bestem ud fra grafen af salgschefens model en værdi for parameteren a .

Svar B.3: Ud fra figuren kan vi aflæse værdien $f(10) = 20$ som vi kan indsætte i udtrykket og løse for a .

$$20 = 4 + \frac{2^{10+1}}{2^a} \Leftrightarrow \log_2 \frac{2^{10+1}}{20-4} = \underline{7}$$

Vi ønsker at omskrive salgschefens regressionsformel på standard form:

$$f(x) = w_0 + w_1 \cdot \phi(x)$$

hvor $\phi(x)$ er en ikke-lineær funktion af x .

Spørgsmål B.4: Hvilken *simpel* funktion $\phi(x)$ kan vi vælge, således at regressionsmodellen kan skrives på standard form?

Svar B.4: Hvis vi samler alle konstanter i andet led i regressionsmodellen, kan vi fx. omskrive den som

$$\frac{2^{x+1}}{2^a} = \frac{2}{2^a} \cdot 2^x = w_1 \cdot \phi(x)$$

hvor $\phi(x) = 2^x$

Opgave C Fairness i ansættelser

En stor virksomhed gennemgår de 10 000 seneste ansøgninger, for at undersøge om der er tegn på at en beskyttet gruppe bliver unfair behandlet. Tabellen nedenfor viser antallet af ansøgere samt hvor mange der er blevet ansat. Derudover er det også undersøgt hvor mange af de ansatte medarbejdere som efterfølgende er blevet afskediget efter kort tid.

	Ansøgere	Heraf ansat	Heraf afskediget efter kort tid
Beskyttet gruppe	1 250	250	30
Total	10 000	2 000	140

Først ser vi på hvor stor en andel der ansættes blandt ansøgerne i den beskyttede gruppe samt blandt resten af ansøgerne.

Spørgsmål C.1: Er kriteriet *demografisk paritet* opfyldt?

Svar C.1: Andelen af ansatte i den beskyttede gruppe er $\frac{250}{1250} = 20\%$ og i den resterende gruppe er andelen ligeledes $\frac{2000-250}{10000-1250} = 20\%$. Vi ser deraf at kriteriet er opfyldt.

Efterfølgende kigger vi på de ansættelser som er “gået galt” på den måde at den ansatte er blevet afskediget inden for en kort periode (trejde søjle i tabellen). Vi vil definere beslutningen om at ansætte en kandidat som “korrekt”, såfremt kandidaten ikke afskediges kort efter.

Spørgsmål C.2: Er kriteriet *equalized opportunity* opfyldt?

Svar C.2: For at få et bedre overblik, kan vi opstille en data-tabel som i kursus-noten.

	Beskyttet gruppe		Resterende kandidater	
	Ej ansat	Ansæt	Ej ansat	Ansæt
Afskediget	?	30	?	140-30=110
Ej afskediget	?	250-30=220	?	(2 000-250)-110=1640
Total	1 000	250	8 000	2 000-250=1 750

Vi bemærker at vi ikke har information om hvordan det ville være gået for de kandidater der ikke blev ansat, så disse felter i tabellen kan ikke udfyldes. Kriteriet *equalized opportunity* er givet ved

$$\left(\frac{220}{220 + 30} = 88\% \right) = \left(\frac{1640}{1640 + 110} \approx 94\% \right)$$

hvilket ikke er sandt. Vi ser deraf at kriteriet ikke er opfyldt.

Spørgsmål C.3: Ud fra den opgivne information kan vi ikke vurdere om kriteriet *equalized odds* er opfyldt. Hvilken yderligere viden skal vi have, for at kunne vurdere dette?

Svar C.3: Kriteriet “equalized odds” kræver at sandsynligheden for ikke at blive afskediget efter kort tid er ens for de to grupper, både blandt de der ansættes og de der ikke ansættes. Vi mangler informationen om hvordan det ville være gået de kandidater som ikke blev ansat.

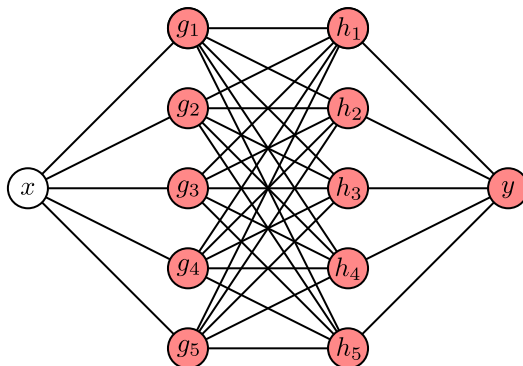
Spørgsmål C.4: Hvilket af de tre fairness-kriterier er mest relevant, hvis man ønsker at sikre lige repræsentation på trods af, at en beskyttet gruppe måske gennemsnitligt set kan have bedre eller dårligere kvalifikationer?

Svar C.4: Kriteriet demographic parity sikrer at sandsynligheden for beslutningen om ansættelse er ens for alle beskyttede grupper, hvilket sikrer lige repræsentation.

C ■

Opgave D Neuralt netværk

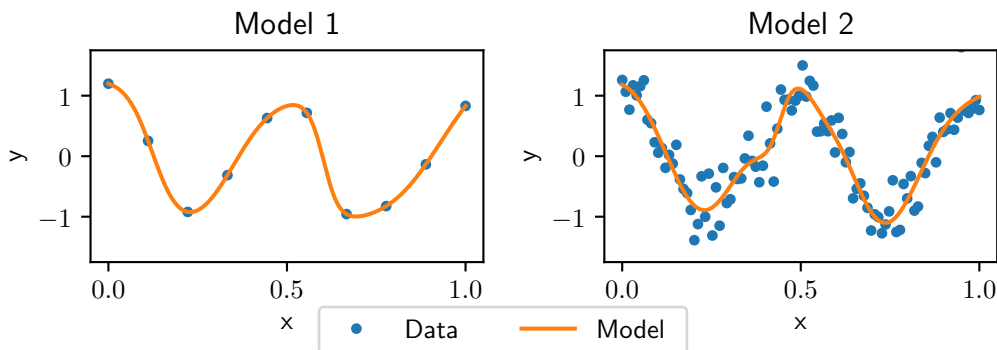
I det følgende anvender vi et neuralt netværk med ét input x , to skjulte lag med fem neuroner i hver, samt ét output y . De skjulte neuroner anvender en hyperbolsk tangens (**tanh**) som aktiveringsfunktion. Hver skjult/output neuron i netværket har et antal vægte (illustreret som forbindelser i figuren) samt en bias-parameter (ikke illustreret i figuren).



Spørgsmål D.1: Hvad er den maksimale værdi, outputtet fra neuron h_1 kan antage?

Svar D.1: Neuronerne i de skjulte lag anvender som aktiveringsfunktion en hyperbolsk tangens, som er en s-formet funktion som går fra -1 til 1. Dermed kan outputtet fra neuron h_1 maksimalt være 1.

Figurerne nedenfor viser modellen fittet til to forskellige trænings-datasæt med hhv. $N = 10$ og $N = 100$ observationer. I begge tilfælde er værdierne $x_1, \dots, x_N$ jævnt fordelt mellem 0 og 1, og y -værdierne er fremkommet som $y_n = \cos(4\pi x_n) + \epsilon_n$, hvor ϵ_n er tilfældig støj med varians $\sigma^2 = 0.5$.



Modellerne er fittet ved at minimere den kvadratiske fejl

$$L(\theta) = \sum_{n=1}^N (y_n - f_{\theta}(x_n))^2,$$

hvor $f_{\theta}(x)$ betegner det neurale netværk med parametrene θ . Minimeringen er sket ved gradient-nedstigning:

$$\theta^{(t+1)} = \theta^{(t)} - \alpha \cdot \nabla L(\theta^{(t)})$$

Spørgsmål D.2: Giv et estimat af fejlen på træningsdatasættet for Model 1.

Svar D.2: Det ses af figuren til venstre, at Model 1 fitter perfekt til datasættet. Deraf vurderes det at træningsfejlen er 0.

Spørgsmål D.3: Hvad er dimensionaliteten af gradient-vektoren $\nabla L(\theta^{(t)})$ (hvor mange elementer har den)?

Svar D.3: Dimensionaliteten af gradient-vektoren svarer til antallet af parametre i modellen. I første skjulte lag har hver neuron 1 input samt 1 bias. I andet lag har hver neuron 5 input samt 1 bias. I output-laget har neuronen 5 input samt 1 bias. Det totale antal vægte, og dermed dimensionaliteten af gradient-vektoren, er således $5 \cdot (1 + 1) + 5 \cdot (5 + 1) + 5 + 1 = \underline{46}$.

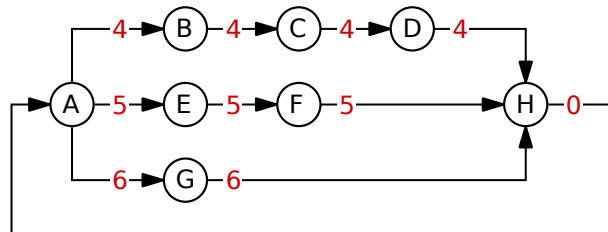
Spørgsmål D.4: Variansen af de 10 x -værdier som er anvendt i Model 1 er ca. $\frac{1}{12}$. Giv et estimat af variansen af de 100 x -værdier som er anvendt i Model 2.

Svar D.4: Det er oplyst at x -værdierne er jævnt fordelt mellem 0 og 1 i begge tilfælde. Variansen er et mål for den gennemsnitlige kvadratiske afvigelse fra middelværdien, og afhænger ikke af antallet af værdier. Da x -værdierne er ens fordelt i de to tilfælde, vil variansen også være ca. den samme, altså ca. $\underline{\frac{1}{12}}$.

D ■

Opgave E Reinforcement learning

Vi betragter et miljø som indeholder otte tilstande (states), A–H. I tilstand A er der tre mulige handlinger (actions): at gå **op**, **ned** eller til **højre**. I de resterende syv tilstande er der kun én mulig handling: at gå til **højre**. Pilene angiver de mulige transitioner mellem tilstandene, og tallene på pilene angiver de tilhørende belønninger (rewards). Hvis man fx. står i tilstand A og foretager handlingen **op** får belønningen 4 og man ender i tilstand B.



Spørgsmål E.1: Hvis vi anvender en discount-factor $\gamma = 0$, hvad er da værdien af tilstand A?

Svar E.1: Vi anvender den rekursive definition af værdien:

$$v(s) = \max_a (r(s, a), \gamma \cdot v(s'))$$

Når vi indsætter for de tre mulige actions fås

$$v(A) = \max \{4 + 0 \cdot v(B), 5 + 0 \cdot v(E), 6 + 0 \cdot v(G)\} = \max\{4, 5, 6\} = \underline{6}.$$

I det følgende anvender vi en discount-factor på $\gamma = 0.9$, og vi får at vide, at værdien af tilstand H er $v(H) = 22.38$.

Spørgsmål E.2: Hvad er værdien af tilstand D?

Svar E.2: Da der kun er en mulig action i tilstand D får vi fra definitionen af værdien følgende:

$$v(D) = 4 + \gamma \cdot v(H) = 4 + 0.9 \cdot 22.38 \approx \underline{24.14}.$$

Vi ønsker nu at finde den optimale policy ved hjælp af q-learning.

Spørgsmål E.3: Når man udelukkende medregner de mulige state-action par, hvor mange værdier skal der læres i q-tabellen?

Svar E.3: Antallet af mulige state-action par svarer til antallet af pile i figuren. I q-tabellen skal vi dermed lære 10 værdier.

Vi vælger at initialisere alle værdier i vores q-tabel med værdien nul, og starter derefter q-learning algoritmen.

Spørgsmål E.4: Efter at have observeret følgende sekvens af states og rewards: $A \xrightarrow{4} B \xrightarrow{4} C \xrightarrow{4} D \xrightarrow{4} H \xrightarrow{0} A \xrightarrow{4} B$, hvorledes vil $q(A, \text{op})$ samlet set blive opdateret (dvs. q-værdien for handlingen **op** i tilstanden A)?

Svar E.4: Vi benytter den generelle formel for opdateringen af q-værdien:

$$q(s, a) = r(s, a) + \gamma \max_{a'} (q(s', a'))$$

Da transitionen $A \xrightarrow{4} B$ observeres 2 gange, vil $q(A, \text{op})$ blive opdateret to gange. Første gang fås følgende

opdatering:

$$q(A, \text{op}) = 4 + 0.9 \cdot \max_{a'} \{q(B, a')\} = 4 + 0.9 \cdot q(B, \text{højre}) = 4 + 0.9 \cdot 0 = 4$$

Inden vi observerer transitionen anden gang, vil $q(B, \text{højre})$ blive opdateret:

$$q(B, \text{højre}) = 4 + 0.9 \cdot \max_{a'} \{q(C, a')\} = 4 + 0.9 \cdot q(C, \text{højre}) = 4 + 0.9 \cdot 0 = 4$$

Når transitionen $A \xrightarrow{4} B$ observeres anden gang fås følgende opdatering:

$$q(A, \text{op}) = 4 + 0.9 \cdot \max_{a'} \{q(B, a')\} = 4 + 0.9 \cdot q(B, \text{højre}) = 4 + 0.9 \cdot 4 = \underline{7.6}.$$