

DANMARKS TEKNISKE UNIVERSITET

KURSUSNAVN	INTRODUKTION TIL INTELLIGENTE SYSTEMER
KURSUSNUMMER	02461
HJÆLPEMIDLER	ALLE HJÆLPEMIDLER ER TILLADT
VARIGHED	2 TIMER
VÆGTNING	ALLE DELOPGAVER VÆGTES ENS

INDHOLD

OPGAVE A: NEDBØR	2
OPGAVE B: PERSONLIGE VÆRDIER	3
OPGAVE C: UNIKKE VÆRDIER	4
OPGAVE D: FRIT FALD	5
OPGAVE E: GITTERVERDEN	6

BESVARELSE AF OPGAVERNE

Alle spørgsmål skal besvares med et entydigt resultat, som skal angives med understregning sidst i hver besvarelse. Besvarelsen skal altid underbygges med relevante betragtninger og/eller beregninger. Det skal klart fremgå hvilke teorier og formler der tages udgangspunkt i, og alle relevante mellemregninger skal medtages.

Vi måler hver dag nedbørsmængden i en have. I løbet af de seneste 365 dage har det regnet 180 dage og været tørt de resterende 185 dage. Andelen af dage det har regnet er dermed $p = \frac{180}{365} \approx 49\%$. Den gennemsnitlige nedbørsmængde pr. dag er målt til $m_x = 1.9$ [mm], og variansen er beregnet til $s_x^2 = 9.5$ [mm²].

Spørgsmål A.1: Beregn et 95% konfidensinterval for andelen af regnvejrsdage på et år og angiv grænserne for intervallet.

Spørgsmål A.2: Hvis vi i stedet havde talt antallet af regnvejrsdage i en 10-årig periode, hvordan ville bredden af konfidensintervallet da omtrentligt være i forhold til bredden af intervallet beregnet ovenfor?

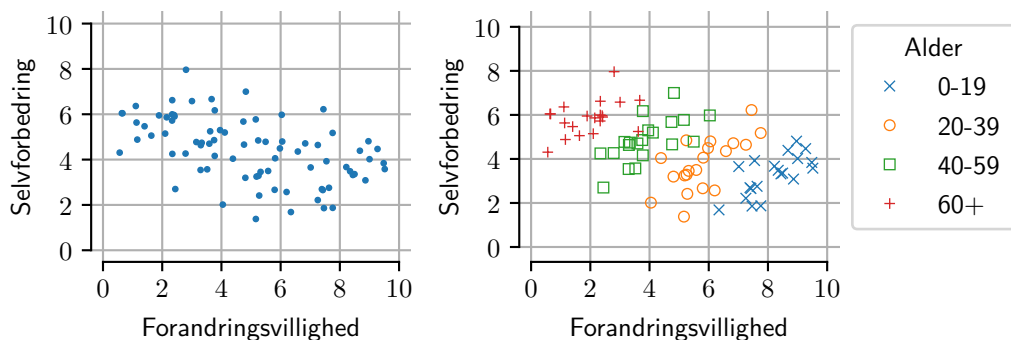
Ifølge Danmarks Meteorologiske Institut er den gennemsnitlige nedbørsmængde pr. dag i Danmark præcis 2.1 [mm].

Spørgsmål A.3: Kan du på baggrund af målingerne fra haven konkludere at der falder mindre regn i haven end der i gennemsnit gør i Danmark?

Vi vil nu bestemme den gennemsnitlige nedbørsmængde pr. dag i en anden have et andet sted i landet, og vi ønsker et 95% konfidensinterval med en fejlmargen på ± 0.5 [mm]. Vi vil derfor måle nedbørsmængden på n tilfældigt udvalgte dage.

Spørgsmål A.4: Hvilken stikprøvestørrelse n vil du anbefale?

Figurene nedenfor viser to kvantitative målinger af de personlige værdier *forandringsvillighed* (F) og *selvforbedring* (S) som måles på en skala fra 0 til 10. Plottene viser målinger for 80 personer (taget fra en kunstig data-population). På plottet til højre er data yderligere inddelt i fire aldersgrupper.



Hvis vi kun ser på aldersgruppen 60+, så kan en lineær regressionsmodel bestemmes til

$$S = 4.6 + 0.6 \cdot F$$

Spørgsmål B.1: Hvad vil værdien af selvforbedring (S) være ifølge ovenstående model for en 60+ årig med en forandringsvillighed på $F = 6$?

Vi ønsker nu at forudsige selvforbedring ud fra forandringsvillighed i en samlet model for alle aldersgrupper ved hjælp af en lineær regression

$$S = w_0 + w_1 \cdot F$$

Spørgsmål B.2: Giv ud fra figuren til venstre et groft estimat af modellens parametre, w_0 og w_1 .

Vi vil nu betragte en lineær regressionsmodel som benytter både forandringsvillighed (F) og aldersgruppe til at forudsige selvforbedring (S). I den forbindelse indfører vi fire binære variable A_{0-19} , A_{20-39} , A_{40-59} , og A_{60+} . Hver af disse variable er lig 1 for den aldersgruppe en person tilhører og ellers 0. For eksempel vil en person på 17 år have værdierne $A_{0-19} = 1$ og $A_{20-39} = A_{40-59} = A_{60+} = 0$. Vi opstiller nu en lineær regressionsligning

$$S = a \cdot F + b_1 \cdot A_{0-19} + b_2 \cdot A_{20-39} + b_3 \cdot A_{40-59} + b_4 \cdot A_{60+}$$

Spørgsmål B.3: Giv udfra figuren til højre et groft estimat af modellens hældningskoefficient a .

Figuren til venstre viser at personer med relativt høj forandringsvillighed typisk har relativt lav selvforbedring.

Spørgsmål B.4: Hvad kan vi ud fra data sige om henholdsvis korrelationen og den kausale sammenhæng mellem forandringsvillighed og selvforbedring?

Den følgende funktion tager som input en liste, `values`, og returnerer en liste med de unikke værdier i input-listen.

```
def find_unique(values):
    unique_values = []
    for x in values:
        if not x in unique_values:
            unique_values.append(x)
    return unique_values
```

Hver sammenligning og hver tilføjelse til en liste tæller som 1 operation, og længden af listen `values` er n . Det vil sige at tidskompleksiteten af operationen `x not in unique_values` er k , hvor k er længden af listen `unique_values`, og tidskompleksiteten af operationen `unique_values.append(x)` er 1.

Spørgsmål C.1: Hvad skal gælde for listen `values` for at opnå et best-case tilfælde, og hvad er best-case tidskompleksiteten $T(n)$ af funktionen målt i antal operationer?

Spørgsmål C.2: Hvad skal gælde for listen `values` for at opnå et worst-case tilfælde, og hvad er worst-case tidskompleksiteten $T(n)$ af funktionen målt i antal operationer?

Spørgsmål C.3: Hvad er worst-case kompleksiteten i store-O notation?

Den følgende funktion udfører samme opgave som `find_unique` men benytter en anden datastruktur til at gemme de unikke værdier.

```
def fast_find_unique(values):
    unique_set = set()
    for x in values:
        if not x in unique_set:
            unique_set.add(x)
    return unique_set
```

Denne datastruktur, kaldet `set`, har den egenskab at kompleksiteten af både operationen `x not in unique_set` og operationen `unique_set.add(x)` er $O(1)$.

Spørgsmål C.4: Hvad er worst-case kompleksiteten af funktionen `fast_find_unique` i store-O notation?

Ifølge Newton's love er den tid t det tager et objekt at falde fra en højde h [m] givet ved formlen

$$t = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}}$$

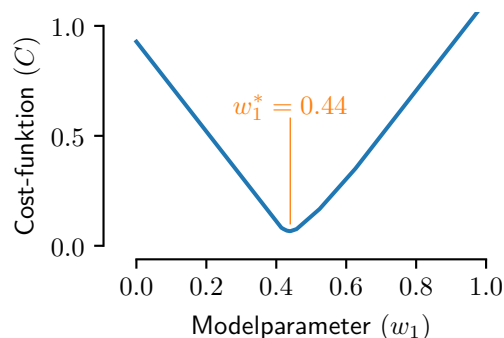
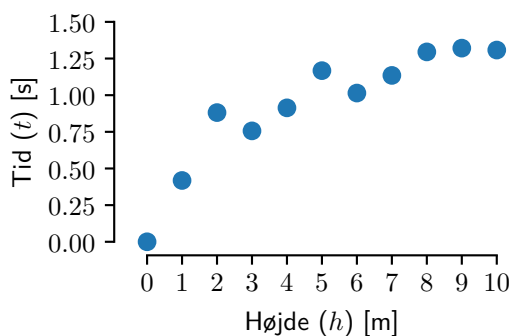
hvor g er gravitationskonstanten. I et forsøg har vi målt den tid det tager et objekt at falde fra $N = 11$ forskellige højder, $h \in \{0, 1, \dots, 10\}$ [m] (se figuren til venstre nedenfor). Vi ønsker nu at bestemme sammenhængen mellem højde og falde-tid (dvs. bestemme gravitationskonstanten g) ud fra en lineær regression.

Spørgsmål D.1: Vis hvorledes formen for falde-tiden kan omskrives til standard-formen for en lineær regression, $t = w_0 + w_1 \cdot x$, og angiv udtrykkene for w_0 , w_1 (udtrykt ud fra g) og x (udtrykt ud fra h).

I det følgende benytter vi $w_0 = 0$ og ser på regressions-ligningen $t = w_1 \cdot x$ hvor $x = \sqrt{h}$. Vi ønsker at benytte absolut-værdien af forskellen mellem den målte og estimerede faldetid som loss-funktion—det vil sige at vi ønsker at minimere følgende cost

$$C(w_1) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |t_i - w_1 \cdot x_i|$$

Et plot af cost-funktionen, som har sit minimum i $w_1^* = 0.44$ ses i figuren nedenfor til højre.



Spørgsmål D.2: Hvad er ifølge den optimale model den estimerede værdi af gravitationskonstanten g ?

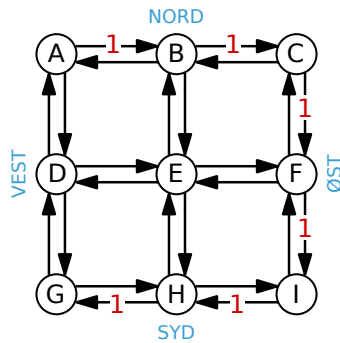
Spørgsmål D.3: Giv ud fra figuren et groft estimat af værdien af gradienten af cost-funktionen for parameter-værdien $w_1 = 0.75$.

Det oplyses endvidere at summen af de observerede x -værdier er beregnet til $\sum_{i=1}^N x_i = 22.47$

Spørgsmål D.4: Beregn gradienten af cost-funktionen med hensyn til modellens parameter i punktet $w_1 = 0$ (som en tal-værdi). Hint: $\frac{d|z|}{dz} = \frac{z}{|z|}$.

Opgave E Gitterverden

Figuren nedenfor viser en gitterverden med 9 tilstande (A–I). Pilene i figuren viser de mulige transitioner mellem tilstandene, og et tal på pilen viser den tilhørende belønning (reward). Transitioner der er angivet med en pil uden et tal har en belønning på nul. Tabellen nedenfor viser kvaliteten (quality) for hver af de mulige transitioner fundet via tabulær q-læring med en discount-faktor på $\gamma = 0.9$.



	Nord	Syd	Øst	Vest
A	—	6.66	8.23	—
B	—	?	8.03	7.40
C	—	7.81	—	7.23
D	7.40	6.00	6.50	—
E	7.23	6.30	6.81	6.66
F	7.03	7.57	—	6.50
G	6.66	—	6.30	—
H	6.50	—	6.57	7.00
I	6.81	—	—	7.30

Spørgsmål E.1: Hvad er den optimale handling (action) hvis vi står i tilstand E?

I q-tabellen mangler værdien for $q(B, \text{Syd})$.

Spørgsmål E.2: Beregn $q(B, \text{Syd})$.

Spørgsmål E.3: Hvis vi kørte q-lærings-algoritmen med en ændret discount-faktor på $\gamma = 0.99$, hvad ville der så ske med tallene i q-tabellen? Vil de blive større, mindre, eller forblive uændret?

Spørgsmål E.4: Hvis vi i stedet for q-læring havde benyttet *value iteration* til at løse problemet, hvad ville værdien af tilstand A, $v(A)$ være?